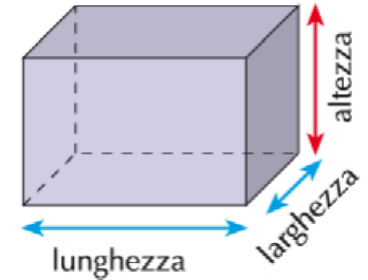


Punti, linee e piani nello spazio

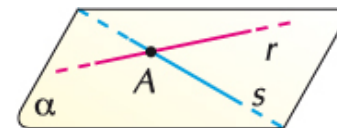
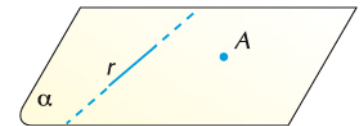
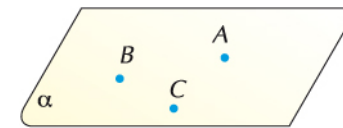
DEFINIZIONE. La **geometria dello spazio** o **geometria dei solidi** o ancora **geometria solida** è il settore della geometria che si occupa dei corpi a tre dimensioni (lunghezza, larghezza e altezza).



Gli enti fondamentali della geometria a tre dimensioni sono gli stessi della geometria a due dimensioni: **punto**, **linea**, **piano**.

È possibile individuare un piano quando sono assegnati:

- tre punti non allineati;
- una retta e un punto non appartenente ad essa;
- due rette incidenti;
- due rette parallele.

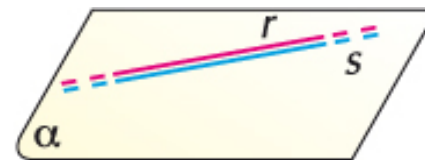
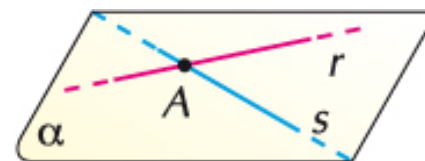
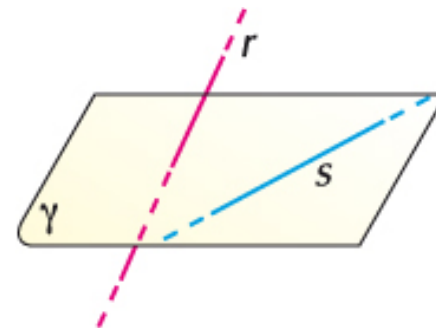


Le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio

Nello spazio due rette possono appartenere allo stesso piano e si dicono **complanari**, oppure appartenere a piani diversi e si dicono **sghembe**.

Le rette complanari possono a loro volta essere:

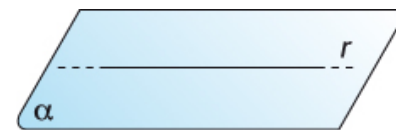
- **incidenti**, se hanno un solo punto in comune;
- **parallele**, se non hanno alcun punto in comune;
- **coincidenti**, se hanno tutti i punti in comune.



Le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio

Nel caso di una retta r e un piano α nello spazio si possono avere le seguenti posizioni:

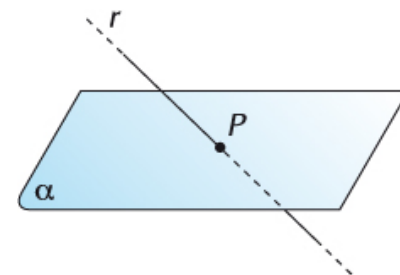
- la retta **giace** sul piano: tutti i suoi punti appartengono al piano;



- la retta è **parallela** al piano: nessun punto della retta appartiene al piano;

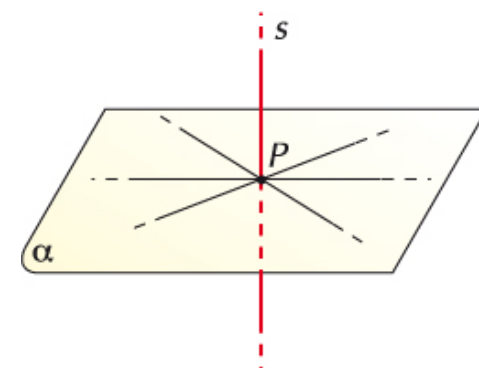


- la retta è **incidente** al piano: retta e piano si intersecano in un punto.

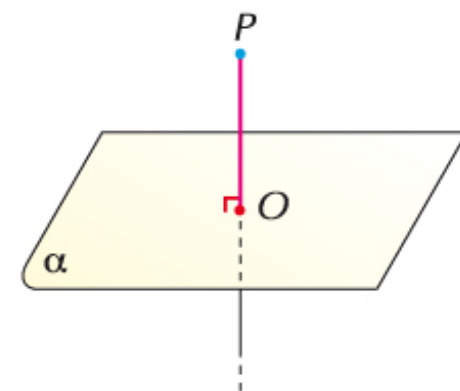


Le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio

DEFINIZIONE. Una **retta è perpendicolare ad un piano** se è incidente al piano e se è perpendicolare ad ogni altra retta del piano passante per quel punto; il punto di intersezione è detto **piede** della perpendicolare.



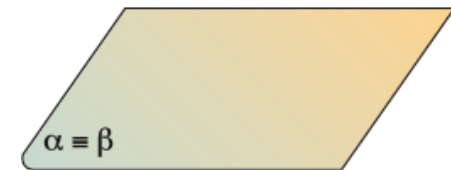
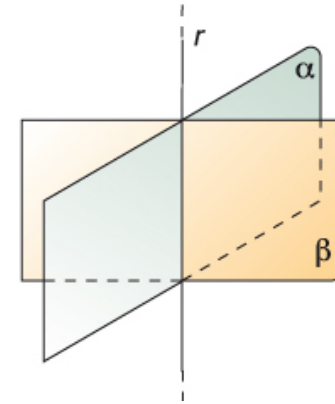
DEFINIZIONE. La **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento perpendicolare condotto da quel punto al piano.



Gli angoli nello spazio: i diedri

Due piani distinti nello spazio possono essere:

- **incidenti** (o secanti), se hanno una retta r in comune;
- **paralleli**, se non hanno alcun punto in comune;
- **coincidenti**, se hanno tutti i loro punti in comune.

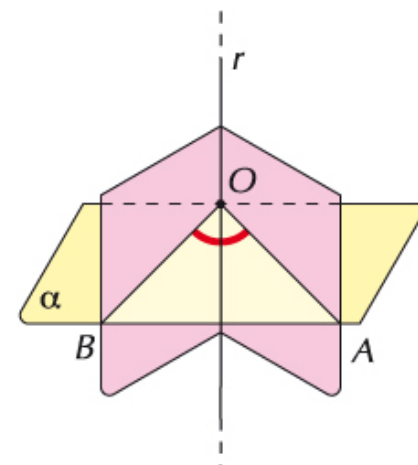
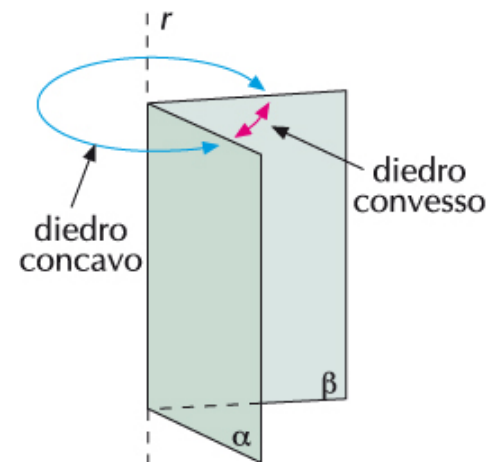


Gli angoli nello spazio: i diedri

DEFINIZIONE. Il **diedro** è ciascuna delle due parti in cui lo spazio rimane diviso da due semipiani aventi la stessa retta d'origine. I due semipiani si chiamano **facce del diedro**; la retta origine si dice **spigolo** o **costola**.

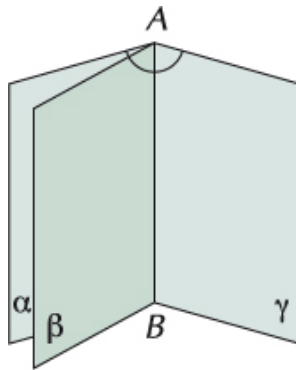
DEFINIZIONE. Il **diedro** che contiene il prolungamento delle due facce si dice **concavo**, quello che non li contiene **convesso**.

DEFINIZIONE. La **sezione normale di un diedro** è l'angolo che si ottiene sezionando il diedro con un piano perpendicolare al suo spigolo. La **misura** di un angolo diedro è data dall'ampiezza della sua sezione normale.

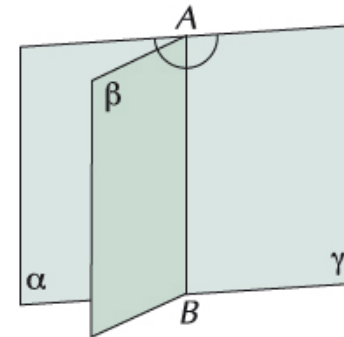


Gli angoli nello spazio: i diedri

DEFINIZIONE. Due diedri si dicono **consecutivi** quando hanno lo spigolo e una faccia comune; si dicono **adiacenti** quando sono consecutivi e le due facce non comuni sono semipiani opposti di uno stesso piano.



Diedri consecutivi



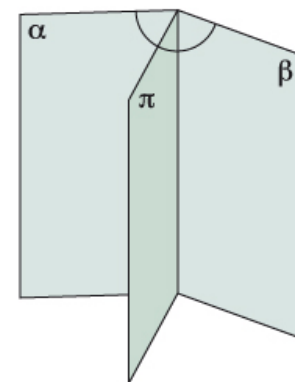
Diedri adiacenti

In analogia con quanto studiato sugli angoli nel piano, diremo che due diedri sono:

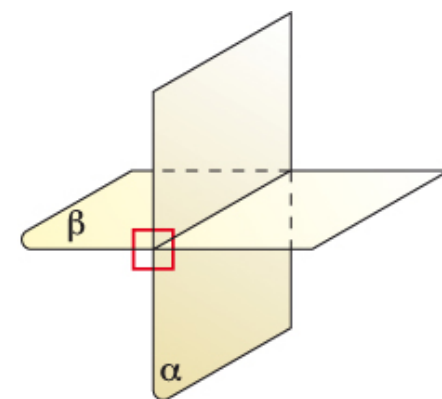
- **complementari** se la somma delle loro ampiezze è 90°
- **supplementari** se la somma delle loro ampiezze è 180°
- **esplementari** se la somma delle loro ampiezze è 360° .

Gli angoli nello spazio: i diedri

DEFINIZIONE. Si dice **semipiano bisettore** il semipiano che, uscendo dallo spigolo del diedro, lo divide in due diedri congruenti.

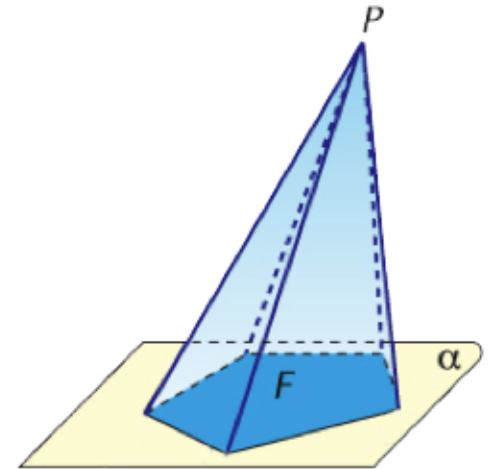


DEFINIZIONE. Due **piani** si dicono **perpendicolari** se intersecandosi formano quattro diedri congruenti ciascuno dei quali misura 90° .



Gli angoloidi

DEFINIZIONE. Un **angoloide** è la parte di spazio limitata da almeno tre angoli aventi il vertice in comune e tutti a due a due consecutivi.

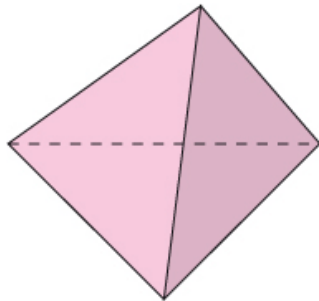


Il punto P si dice **vertice**, le semirette che passano per i vertici del poligono si dicono **spigoli**, e gli angoli formati da due spigoli consecutivi si dicono **facce**.

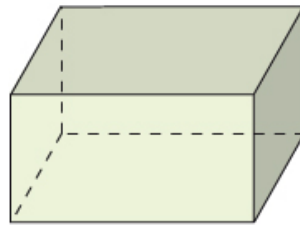
PROPRIETÀ. La somma degli angoli che costituiscono le facce di un angoloide è sempre minore di un angolo giro.

La relazione di Eulero

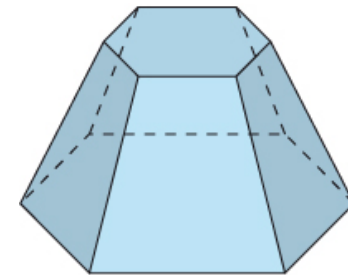
Consideriamo i seguenti poliedri e contiamo, per ognuno, il numero di facce, vertici e spigoli.



$$f = 4, v = 4, s = 6$$



$$f = 6, v = 8, s = 12$$



$$f = 8, v = 12, s = 18$$

Possiamo notare che in ogni poliedro convesso il numero delle facce sommato al numero dei vertici è uguale al numero degli spigoli aumentato di due:

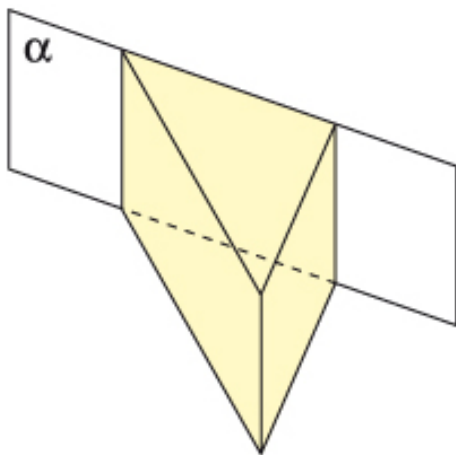
$$f + v = s + 2$$

Pertanto possiamo enunciare il seguente:

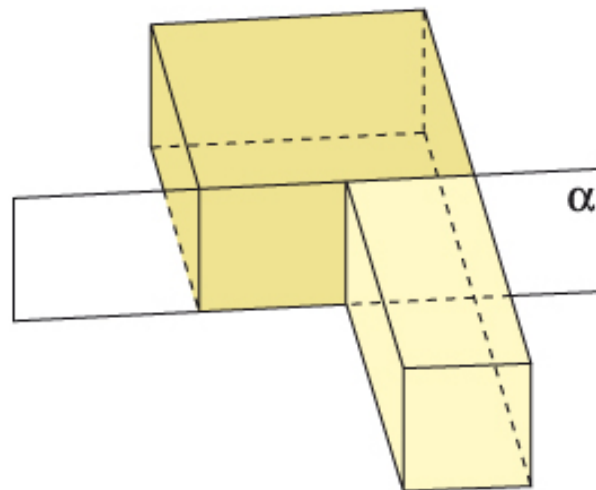
TEOREMA. In ogni poliedro convesso la somma del numero delle facce e del numero dei vertici è uguale al numero degli spigoli aumentato di due.

I poliedri

- Un poliedro si dice **convesso** se il piano di ogni faccia non interseca il poliedro;
- si dice **concavo** se il piano di qualche faccia interseca il poliedro.



Poliedro convesso



Poliedro concavo

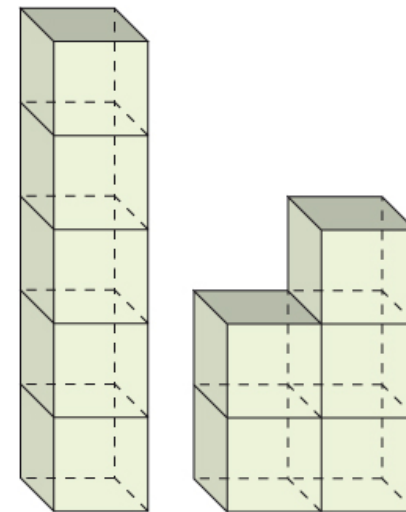
Il concetto di volume

DEFINIZIONE. Il **volume** di un corpo consiste nella parte di spazio che il corpo occupa.

DEFINIZIONE. Due solidi si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso volume.

PROPRIETÀ.

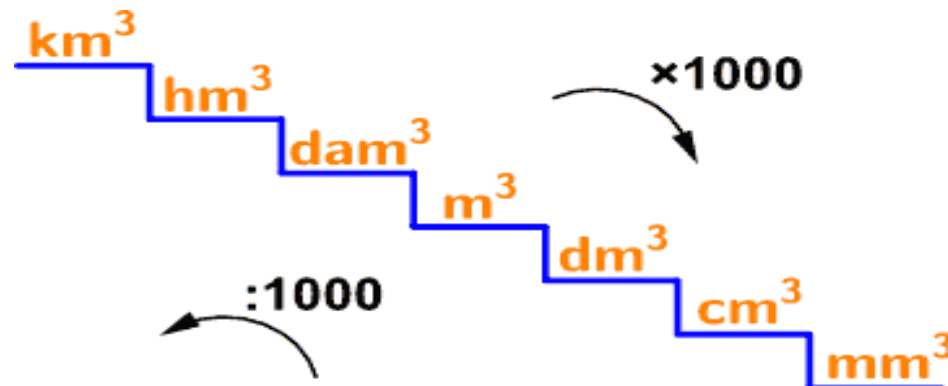
- Solidi scomponibili in solidi rispettivamente congruenti sono equivalenti;
- solidi che sono somma di solidi rispettivamente congruenti sono equivalenti;
- solidi che sono differenza di solidi rispettivamente congruenti sono equivalenti;
- solidi che sono somma di solidi rispettivamente equivalenti sono equivalenti;
- solidi che sono differenza di solidi rispettivamente equivalenti sono equivalenti.



Il volume dei poliedri

DEFINIZIONE. Misurare il volume di un solido significa confrontarlo con un altro solido scelto come unità di misura e stabilire quanto volte quest'ultimo è contenuto nel primo.

UNITÀ DI MISURA. Come unità di misura del volume dei solidi assumeremo un cubo con lo spigolo di 1 metro, cioè il **metro cubo** o un suo multiplo o sottomultiplo.



Il peso specifico

DEFINIZIONE. Per ogni sostanza, il rapporto tra il peso e il volume è costante e prende il nome di **peso specifico**. In simboli:

$$P_s = \frac{P}{V}$$

Dalla formula precedente ricaviamo le formule inverse:

$$P = V \cdot P_s$$

$$V = \frac{P}{P_s}$$

Nell'applicare queste formule bisogna inoltre considerare che:

- se il volume è espresso in **cm³**, il peso è espresso in **g** e viceversa;
- se il volume è espresso in **dm³**, il peso è espresso in **kg** e viceversa;
- se il volume è espresso in **m³**, il peso è espresso in **Mg** (tonnellate) e viceversa.